

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط:

$A(-1; 1; 3)$ ، $B(1; 0; -1)$ ، $C(2; -1; 1)$ ، $D(2; 0; -1)$ والمستوي (P) ذا المعادلة: $2y + z + 1 = 0$.

ليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيل وسيطي له:
$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + \beta \\ z = 1 - 2\beta \end{cases}$$
 حيث β وسيط حقيقي.

- 1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) ، ثم تحقق أن المستقيم (BC) محتوي في المستوي (P) .
- 2) بين أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.
- 3) أ) احسب المسافة بين النقطة A والمستوي (P) .
- ب) بين أن D نقطة من (P) ، و أن المثلث BCD قائم.
- 4) بين أن $ABCD$ رباعي وجوه، ثم احسب حجمه.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I) المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ:
$$v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$$

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول.

2) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ: $u_0 = 1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$

1) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 6$.

2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) أ) برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

ب) بين أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - (4 \cos \alpha)z + 4 = 0 \dots\dots\dots (I)$$
 حيث α وسيط حقيقي.

(2) من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ؛ نرسم إلى حلي المعادلة (I) z_1 و z_2 . يبين أن: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$.

(3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها: $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ؛ $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = 4 + i\sqrt{3}$ على الترتيب.
 (أ) أنشئ النقط A ، B و C .

(ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته و زاويته.

(ج) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; -1), (C; 2)\}$ ، ثم أنشئ G .

(د) احسب لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

x	f(x)
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

التمرين الرابع: (06.5 نقاط)

(I) f الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C) .

(2) احسب $f'(x)$. يبين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) يبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرًا للعدد α .

(4) ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C) ، ثم ارسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

(5) عين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

(II) g الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $g(x) = f(2x-1)$ (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

(1) ادرس تغيرات الدالة g على $]-\infty; 1[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) (أ) تحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ، ثم يبين أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f(\alpha)$.

(ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

(ج) تحقق من أن: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية: (E) $z^2 + 4z + 13 = 0$

(1) تحقق أن العدد المركب $-2 - 3i$ حل للمعادلة (E)، ثم جد الحل الآخر.

(2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتهما $z_A = -2 - 3i$ و $z_B = i$ على الترتيب. S التشابه المباشر

الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

(أ) بين أن: $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$.

(ب) احسب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

(3) لتكن النقطة D ، حيث: $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

(أ) بين أن D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

(ب) احسب z_D لاحقة النقطة D .

(ج) بين أن: $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على

المجال $[0;1]$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ ،

و (d) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

(1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول، $u_0 = \frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(أ) أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة، ثم مثل الحدود u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزاً خطوط التمثيل.

(ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

(2) (أ) أثبت أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0;1]$.

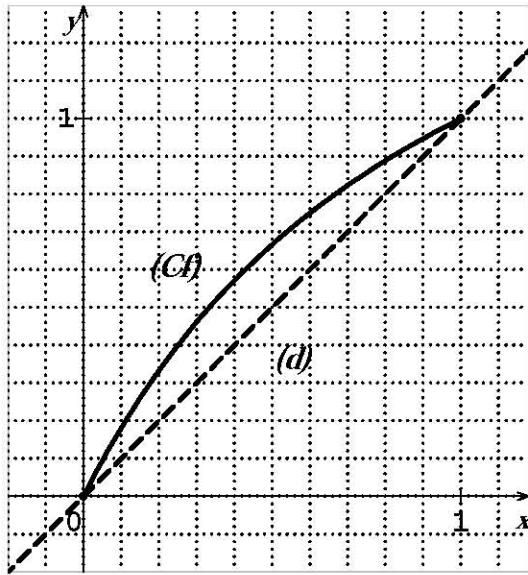
(ب) برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

(ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

(أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدّها الأول v_0 .

(ب) احسب نهاية (u_n) .



التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط $A(2; 1; -1)$ ، $B(1; -1; 3)$ ، $C\left(-\frac{3}{2}; -2; 1\right)$ و $D\left(\frac{7}{2}; -3; 0\right)$. ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$.
(1) أ) احسب إحداثيات النقطة I .

ب) بين أن: $2x + 4y - 8z + 5 = 0$ معادلة ديكارتية لـ (P) ؛ المستوي المحوري لـ $[AB]$.

(2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1; 2; -4)$ شعاع توجيه له.

(3) أ) جد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) و المستقيم (Δ) .

ب) بين أن (AB) و (Δ) من نفس المستوى، ثم استنتج أن المثلث IEC قائم.

(4) أ) بين أن المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) و المستقيم (IE) .

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$

(1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) استنتج أنه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 2 cm)

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. فسّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أ) بين أنه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.

(3) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة: $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أ) احسب x_0 .

ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .

ج) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متمايزين.

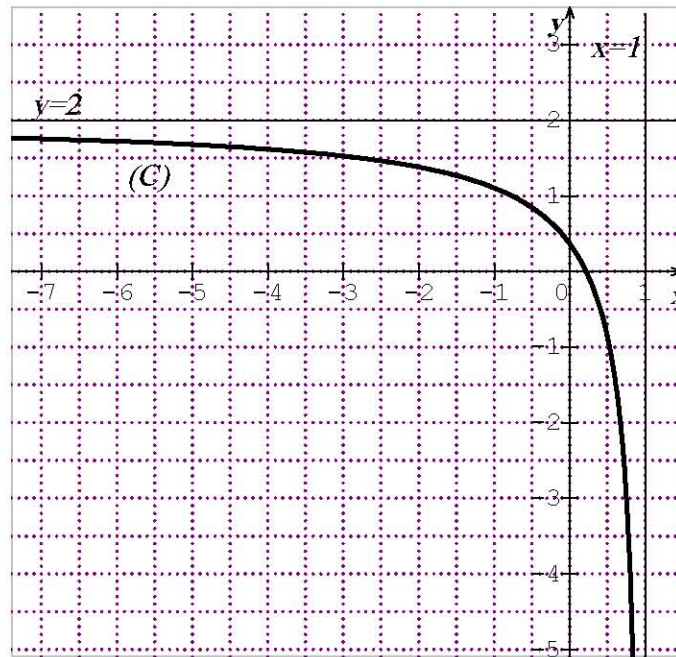
العلامة		عناصر الإجابة
مجموع	مجزأة	
01,25	0,75	التمرين الأول (04,5 نقط) (1) التمثيل الوسيطى للمستقيم (BC) : $x = 1+t$ ؛ $y = -t$ ؛ $z = -1+2t$ ($t \in \mathbb{R}$) (BC) محتوى في (P) : $2(-t) + (-1+2t) + 1 = 0$
	0,5	
1	$2 \times 0,5$	(2) (Δ) و (BC) غير متوازيين وغير متقاطعين إذن (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.
02,25	0,5	(3) أ) المسافة بين A و (P) $d(A;(P)) = \frac{6\sqrt{5}}{5}$
	0,25	ب) نقطة D من (P) $2(0) - 1 + 1 = 0$
	0,5	BCD مثلث قائم $CD^2 = 1$ ، $BD^2 = 1$ ، $BC^2 = 6$
	0,5	(4) $ABCD$ رباعي الوجوه $A \in (P)$ لأن $d(A,(P)) \neq 0$ علما أن $(P) = (ABC)$
	0,5	- حجم رباعي الوجوه $ABCD$ $V = \frac{1}{3} A_{(BCD)} \times d(A;(P)) = 1 \text{ u.v}$

		التمرين الثاني (04 نقط)
01	0,75	(I) (1) (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{5}{6}$ و حدّها الأول $v_0 = 5$
	0,25	(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$
03	1	(II) (1) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $1 \leq u_n \leq 6$
	0,5	(2) (u_n) متزايدة تماما $u_{n+1} - u_n > 0$; $u_{n+1} - u_n = \frac{(6-u_n)(1+u_n)}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}$
	0,5	(3) أ) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $6 - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(6 - u_n)$ $(\frac{1}{6+\sqrt{5u_n+6}} < \frac{1}{6})$
	0,5	ب) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$ (يمكن استعمال البرهان بالتراجع)
	0,5	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$

التمرين الثالث (05 نقط)		
01	0,5	 $\Delta = 4i^2 \sin^2 \alpha$ (1)
	0,5	 $z'' = 2(\cos \alpha - i \sin \alpha)$ ، $z' = 2(\cos \alpha + i \sin \alpha)$
01,25	0,25	 تحديد (2) $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ ، $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ (أو العكس)
	$2 \times 0,5$	 $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = +1$ و $\frac{z_1}{z_2} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$
02,75	0,75	(3) أ) إنشاء النقط A ، B و $C \in C_{(O;2)}$ و فاصلتها 1 و B نظيرة A بالنسبة $(x'x)$ و C لها نفس ترتيب A .
	0,5	 ب) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$
	0,5	 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ صورة C ، $z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2}i(z_B - z_A)$
	$2 \times 0,25$ 0,5	 ج) إنشاء G $z_G = 4 + 2i\sqrt{3}$ د) $z_D = 4$

التمرين الرابع: (06,5 نقط)		
01	0,5	 (I) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ؛ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ (1)
	0,5	 $x = 1$ ، $y = 2$ معادلنا مستقيمين مقاربين
01	0,5	 (2) من أجل $x \in]-\infty; 1[$ ، $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}(1 + e^{x-1})$
	0,25 0,25	 بما أن $f'(x) < 0$ من أجل كل $x \in]-\infty; 1[$ فإن f متناقصة تماما على $]-\infty; 1[$ جدول التغيرات
	0,25 0,25	 (3) للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α من $]-\infty; 1[$ (مبرهنة القيم المتوسطة) $0,21 < \alpha < 0,22$
01,25	0,5	 (4) إنشاء المستقيمين المقاربين لـ (C)
	0,5	 إنشاء المنحنى (C)
	0,25	 إنشاء المنحنى (C') الممثل للدالة $ f $
0,25	0,25	 (5) للمعادلة $ f(x) = m$ حلين مختلفين في الإشارة من أجل $m \in \left] \frac{1}{e}; 2 \right[$
01,5	$0,25 \times 2$	 (II) (1) $g'(x) = f'(2x - 1)$ إذا كان $x < 1$ فإن $2x - 1$ ، وعليه $f'(2x - 1) < 0$
	0,25	 g متناقصة تماما على $]-\infty; 1[$

	0,5 0,25	$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2$ جدول تغيّرات g (نفس جدول تغيّرات f)
1	$2 \times 0,25$ 0,25 0,25	(أ) $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$ ، $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = f(\alpha) = 0$ (ب) (T) معادلة له: $y = 2f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$ (ج) $(T): y = \left(\frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}\right)$ ($e^{\frac{1}{\alpha-1}} = -\frac{\alpha}{\alpha-1}$)



		الموضوع الثاني
		التمرين الأول: (04,5 نقط)
1	0,5	(1) $-2 - 3i$ حل للمعادلة (E) $(-2 - 3i)^2 + 4(-2 - 3i) + 13 = 0$
	0,5	استنتاج الحل الآخر للمعادلة (E) $-2 - 3i$
01,5	1	(2) أ) الكتابة المركبة للتشابه S $z' - z_A = \frac{1}{2} e^{i(\frac{\pi}{2})} (z - z_A)$
	0,5	ب) $z_C = -4 - 2i$
02	0,5	(3) أ) مرجح النقطتين A و B مرفقين بالمعاملين -3 و 1 على الترتيب
	0,5	ب) لاحقة D هي $z_D = -3 - 5i$
	0,5	ج) $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$
	0,5	ACD مثلث قائم في A و متساوي الساقين ($AD = AC$) و $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$

		التمرين الثاني: (04 نقط)
04	0,50	(1) أ) تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 :
	0,25	ب) التخمين: (u_n) متزايدة تماما و متقاربة.
	0,50	(2) أ) $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ ، f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.
	0,50	ب) البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.
	0,75	ج) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-u_n)}{u_n+1}$ و منه $u_{n+1} - u_n > 0$ أي (u_n) متزايدة تماما.
	0,75	(3) أ) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$. الحد الأول : $v_0 = -1$.
	0,50	ب) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، $u_n = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.
	0,25	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. (لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$)

التمرين الثالث (04,5 نقط)		
01	0,25 0,25 0,5	(1) $I\left(\frac{3}{2}; 0; 1\right)$ (ب) التحقق أن I نقطة من (P) (تقبل كل طريقة سليمة) $\overrightarrow{AB}$ ناظمي لـ (P)
0,5	0,5	(2) (Δ) تمثيل وسيطي له $\begin{cases} x = k - \frac{3}{2} \\ y = 2k - 2 \\ z = -4k + 1 \end{cases} (k \in \mathbb{R})$ (يقبل أي تمثيل وسيطي آخر)
01	$2 \times 0,5$	(3) (أ) تقاطع (P) و (Δ) : $t = \frac{1}{3}$ و منه $E\left(-\frac{7}{6}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$
01	0,5 0,5	(ب) (AB) و $\overrightarrow{u}$ مرتبطان خطيا أي المثلث IEC قائم في E (يقبل أي تبرير) $(EC^2 + IE^2 = IC^2)$
01	$2 \times 0,25$ 0,5	(4) (أ) $(ID) \perp (AB)$ و $(ID) \perp (IE)$ (ب) حجم رباعي الوجوه $DIEC$ $V = \frac{28}{9}uv$

التمرين الرابع (07 نقط)		
0,75	0,25 0,5	(I) $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$ $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = +\infty$ (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
01,25	0,5 0,25 0,25 0,25	من أجل $x \in]-1; +\infty[$ ، $g'(x) = \frac{2x^2 + 4x}{x+1}$ إشارة $g'(x)$ حسب قيم x إذا كان $-1 < x \leq 0$ فإن $g'(x) \leq 0$ و إذا كان $x \geq 0$ فإن $g'(x) \geq 0$ جدول التغيرات (2) $g(x) \geq 4$ و منه $g(x) > 0$
0,75	0,25 0,25 0,25	(II) (1) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب (ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{1}{x+1} + 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = +\infty$

01,5	0,5	 $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ (أ) (2)									
	0,25	]-1; +∞[دالة متزايدة تماما على (ب) f									
	0,25	 جدول تغيرات f									
	0,25	 (ج) للمعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا في]-1; +∞[(مبرهنة القيم المتوسطة)									
	0,25	 $f(0) = -1$ و $f(0,5) \approx 0,37$. $0 < \alpha < 0,5$									
01	0,25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$ بجوار (C_f) لـ (Δ) مستقيم مقارب مثل لـ (3) (أ) $y = x$									
	0,25	 (ب) $f(x) - x = \frac{-1 + 2 \ln(x+1)}{x+1}$									
	0,5	<table border="1"><tr><td>x</td><td>-1</td><td>$-1 + \sqrt{e}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x) - x$</td><td> </td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table> استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)	x	-1	$-1 + \sqrt{e}$	$+\infty$	$f(x) - x$		-	0	+
	x	-1	$-1 + \sqrt{e}$	$+\infty$							
$f(x) - x$		-	0	+							
0,5	0,5	 $x_0 = -1 + \sqrt{e^3}$ (أ) (4)									
1,25	1	 (ب) رسم المستقيمين المقاربين، المماس (T) و (C_f)									
	0,25	 (ج) $0 < m < \frac{2}{\sqrt{e^3}}$									

