



دورة: 2019

المدة: 03 سا و30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(1) المتالية العددية المعرفة بـ $u_0 = 13$ و $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

(1) أ) برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي $n > 1$.

ب) أدرس اتجاه تغير المتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

(2) المتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بـ $v_n = \ln(u_n - 1)$.

أثبت أن المتالية (v_n) حسابية يطلب تعين أساسها وحدتها الأولى.

(3) اكتب v_n بدلالة n ثم بين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ واحسب عندئذ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) بين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $(u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^2}\right)^{n+1}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وكريمة واحدة تحمل الرقم 2 وسبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وثلاث كريات تحمل الرقم 2 (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا كريتين من الكيس في آن واحد ونعتبر الحادتين A و B حيث: A : "سحب كريتين من نفس اللون" ، B : "سحب كريتين تحملان نفس الرقم" .

(1) بين أن احتمال الحادثة A هو $P(A) = \frac{31}{66}$ واحسب احتمال الحادثة B .

(2) علما أن الكريتين المسحوبتين من نفس اللون، ما احتمال أن تحملان نفس الرقم؟

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس. عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z-i)(z^2-4z+5)=0$.

II. نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B ، و C التي لاحقاتها $i, -2i$ و $2+i$ على الترتيب.

1) اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$ على الشكل الأسني، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $i+2$ نضع $f(z) = \frac{i z - 1 - 2i}{2z - 4 - 2i}$

أ) عين المجموعة (E) للنقط M من المستوى ذات الاحقة z التي تتحقق: $|f(z)| = \frac{1}{2}$

ب) بين أن العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب.

3) نعتبر الدوران r الذي مرکزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) عين لاحقة D صورة B بالدوران r وبين أن النقط D, A و C في استقامية.

ب) استنتاج أن D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تحديد طبيعته وعناصره.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1) الدالة العددية المعرفة على $[0; 2] \cup [2; +\infty)$ بـ $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$.

أ) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $[0; 2] \cup [2; +\infty)$ وشكل جدول تغيراتها.

3) نسمى (Γ) المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية التبيرية "ln" في المعلم السابق.

أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المنحنى (Γ) .

4) ارسم بعانياً المنحنى (Γ) ثم المنحنى (C_f) .

5) H الدالة المعرفة على المجال $[3; +\infty)$ بـ $H(x) = \int_3^x \ln(t) dt$ حيث t متغير حقيقي موجب تماما.

أ) باستعمال المتكاملة بالتجزئة، عين عبارة $H(x)$ بدالة x .

ب) احسب A مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) وحامى محور الفواصل

وال المستقيمين ذوى المعادلتين: $x=3$ و $x=4$.

6) g الدالة المعرفة على $[-1; 0] \cup [-\infty; -1]$ بـ $g(x) = f(-2x)$.

دون حساب عبارة $g(x)$ حدد اتجاه تغير الدالة g على مجموعة تعريفها.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها كريتان تحمل الرقم 0 وثلاث تحمل الرقم 1 والكريات الأخرى تحمل الرقم 2. نسحب عشوائياً وفي آن واحدٍ ثلث كريات من الصندوق. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب، جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة.

(1) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.

(2) بين أنّ احتمال الحصول على ثلث كريات كل منها تحمل رقمًا زوجيًّا هو $\frac{7}{24}$.

(3) نسحب الآن من الصندوق كريتين على التوالي دون إرجاع.

ما احتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علمًا أن جداء هما زوجي؟

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الدالة المعرفة على المجال $[4; 7]$ بـ $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$

(1) أ) بين أنّ الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[4; 7]$.

ب) استنتج أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7]$ فإنّ $f(x) \in [4; 7]$.

(2) برهن أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7]$ فإنّ $f(x) - x = \frac{-x^2 + 9x - 14}{x - 4 + \sqrt{x+2}} > 0$

ثم استنتج أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7]$ فإنّ $f(x) - x > 0$

(3) (المتالية العددية المعرفة بـ $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n)

أ) برهن بالترجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n $4 \leq u_n < 7$.

ب) استنتج اتجاه تغير المتالية (u_n) ثم بين أنّها متقاربة.

(4) أ) بين أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n $7 - u_{n+1} < \frac{1}{4}(7 - u_n)$

ب) استنتج أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n $7 - u_n < 3\left(\frac{1}{4}\right)^n < 0$ ، ثم احسب نهاية المتالية (u_n) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث:

$$z_C = -2z_A \quad \text{و} \quad z_B = \overline{z_A} \quad , \quad z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$$

(1) أ) اكتب العدد المركب z على الشكل الأسني .

$$\cdot \left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}} \right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}} \right)^{2019}$$

ب) احسب العدد

(2) أ) الانسحاب الذي يحول A إلى C ، عين z_D لاحقة النقطة D صورة B بالانسحاب T .

ب) استنتج طبيعة الرياعي $ABDC$.

(3) اكتب العدد المركب $z_C - z_A$ على الشكل الأسني.

(4) جد قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$ عدداً حقيقياً.

(5) لتكن M نقطة كافية من المستوى لاحقتها z حيث M تختلف عن A وتختلف عن C .

عين (E) مجموعة النقط M التي من أجلها يكون $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عدداً حقيقياً موجباً تماماً.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. تؤخذ وحدة الطول 2cm .

(\mathcal{C}_f) و (\mathcal{C}_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على \mathbb{R} كما يلي:

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x) = e^x - ex$$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

ب) استنتاج اشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقة.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f .

(3) احسب كلاً من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) ادرس الوضع النسبي للمنحنين (\mathcal{C}_f) و (\mathcal{C}_g) على \mathbb{R} .

(5) ارسم على المجال $[0; 2]$ المنحنين (\mathcal{C}_f) و (\mathcal{C}_g) في نفس المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (يعطى $e^2 - 2e \approx 2$).

(6) احسب بالسنتيمتر المربع، مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنين (\mathcal{C}_f) و (\mathcal{C}_g).

(7) h الدالة المعرفة على المجال $[2; -2]$ كما يلي: $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$ و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بين أن h دالة زوجية.

ب) من أجل $[2; 0]$ احسب $x \in [0; 2]$ $h(x) + f(x)$ ثم استنتاج كيفية رسم (Γ) انطلاقاً من (\mathcal{C}_f) ثم ارسمه.

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)							
مجم	مجراة								
04	0.75×2	<p>التمرين الأول: (04 نقاط)</p> <p>(1) أ) تبيان بالترابع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n > 1$. : $u_n > 1$</p> <p>ب) دراسة اتجاه تغير المتالية (u_n) واستنتاج تقاريرها :</p> <p>..... (u_n) متزايدة تماما على \mathbb{N}</p> <p>بما أن (u_n) متزايدة ومحددة من الأسفل فهي متقاربة</p> <p>(2) إثبات أن المتالية (v_n) حسابية وتعيين أساسها وحدتها الأول :</p> <p>..... من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - v_n = -\ln 5$</p> <p>..... $v_0 = \ln(12)$: v_0 حدتها الأول</p> <p>..... $v_n = \ln\left(\frac{12}{5^n}\right)$: v_n بدلالة n كتابة</p> <p>..... تبيان أن $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$</p> <p>..... حساب نهاية المتالية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$: (u_n)</p> <p>..... (4) تبيان أن : $(u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^2}\right)^{n+1}$</p>							
	0.50							
	0.50							
	0.25							
	0.25							
	0.25							
	0.25							
	0.25							
3.75	01	<p>التمرين الثاني: (04 نقاط)</p> <p>(1) تبيان أن : $P(A) = \frac{31}{66}$</p> <p>..... $P(B) = \frac{17}{33}$</p>							
	01							
	0.25	<p>(2) احتمال أن تحمل نفس الرقم :</p> <p>..... $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{15}{31}$</p>							
	025×3	<p>(3) أ) قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :</p> <table border="1"> <tr> <td>x_i</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>$P(X = x_i)$</td> <td>$\frac{10}{66}$</td> <td>$\frac{35}{66}$</td> <td>$\frac{21}{66}$</td> </tr> </table>	x_i	3	4	5	$P(X = x_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{35}{66}$
x_i	3	4	5						
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{35}{66}$	$\frac{21}{66}$						
0.25×3								
0.25	0.25	<p>الأمل الرياضي</p> <p>..... $E(X) = \frac{275}{66}$</p>							

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموع	مجراة	
05	0.5×3	التمرин الثالث: (05 نقاط) <p>ا. حلول المعادلة هي : $i, 2-i, 2+i$</p> $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad (1.1)$ <p>المثلث ABC قائم في C ومتتساوي الساقين</p> <p>2- (أ) هي محور القطعة $[BC]$</p> $[f(i)]^{1440} \in \mathbb{R}^+ \quad \text{و} \quad f(i) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ <p>النقط في استقامية أي $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_D} = -1$ و $z_D = 4+i$ (3-أ)</p> <p>- ب) هي صورة A بتحاک مركزه C ونسبة 1-أو بدوران مركزه C وزاويته π أو بتناظر مركزي بالنسبة لـ C أو بتشابه مباشر نسبته 1 مركزه C وزاويته π</p>
2.5	0.5×3	التمرин الرابع: (07 نقاط) <p>(1) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$</p> <p>التسير الهندسي: $x=0$ و $x=2$ معادلتین للمستقيمين المقاربين للمنحنی (C_f)</p> <p>(ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$</p>
	0.25×2	
	0.5	
01.75	0.5	(2) اتجاه تغير الدالة f : لدينا $f'(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2}$ <p>إشارة $f'(x)$</p> <p>f متزايدة تماما على كل من المجالين: $[4; +\infty]$ و $[0; 1]$ و f متناقصة تماما على كل من المجالين $[1; 2]$ و $[2; 4]$ و تشكيل جدول التغيرات</p>
	0.50	
	3×0.25	
0.75	0.5	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = 0 \quad (3)$ <p>التسير البياني: (Γ) منحنى مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.</p>
	0.25	
0.5	0.5	ب) وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المنحنى (Γ) : لدينا $f(x) - \ln x = \frac{1}{x-2}$ <p>إذن: على المجال $[0; 2]$: (C_f) يقع تحت (Γ)</p> <p>وعلى المجال $[2; +\infty]$: (C_f) يقع فوق (Γ).</p>
	0.5	
0.5	0.5	(4) الرسم

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموع	مجزأة	
0.5	0.25	$H(x) = \int_3^x (\ln t) dt = -x + 3 + x \ln x - 3 \ln 3.$ <p>أ) باستعمال المتكاملة بالتجزئة نجد :</p> $\mathcal{A} = (-1 + 9 \ln 2 - 3 \ln 3) (u.a).$ <p>.....</p>
	0.25	
0.5	0.25	<p>ب) المساحة .</p> <p>.....</p> <p>الدالة g المعرفة على المجموعة $[-\infty; -1] \cup [-1; 0]$:</p> $g(x) = f(-2x)$
	0.25	<p>الدالة g متناقصة على $[-2; -1] \cup \left[-1; \frac{-1}{2}\right] \cup \left[\frac{-1}{2}; 0\right]$ ومتزايدة على $[-\infty; -2] \cup \left[-2; -\frac{1}{2}\right]$</p> $g'(x) = -2f'(-2x)$

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموع	مجزأة	
التمرين الأول: (04 نقاط)		
02.5	0.5	(1) عدد الامكانيات هو 120 ،
	01.5	قانون الاحتمال: . قيم X هي 0,1 ، 2 ، 4 ، 8 مع احتمالاتها
	0.50	الاول الرياضي هو $\frac{231}{120}$
01	01	(2) احتمال الحصول على 3 كريات تحمل كل منها رقم زوجيا $\frac{7}{24}$
0.5	0.25×2	(3) احتمال الحصول على كرتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن الجداء زوجي هو
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
01.25	0.75	(1) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4; 7]$.
	0.5	ب) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7]$ يكون: $f(x) \in [4; 7]$
0.75	0.75	(2) . $f(x) - x > 0$: $f(x) - x = \frac{-x^2 + 9x - 14}{\sqrt{x+2} + x - 4}$ ومن أجل كل x من المجال $[4; 7]$
01.25	0.75	(3) أ) برهان بالترابع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 \leq u_n < 7$.
	0.25	ب) لدينا: $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن: $u_{n+1} - u_n = f(u_{n+1}) - f(u_n)$ ومنه f متزايدة تماما.
	0.25	(4) أ) برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $7 - u_{n+1} < \frac{1}{4}(7 - u_n)$.
0.75	0.25	ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $0 < 7 - u_n < \frac{3}{4^n}$
	0.25	و حسب مبرهنة الحصر. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$
التمرين الثالث: (05 نقاط)		
01.5	01	(1) أ) الشكل الأسي لـ z_A
	0.5	ب) حساب $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$
01.5	0.75	(2) أ) حساب صورة z_D بواسطة T
	0.75	ب) الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع.
0.75	0.75	(3) الشكل الأسي للعدد المركب $6\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$ هو $z_C - z_A$
0.5	0.5	(4) لدينا $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n = e^{-in\frac{\pi}{3}}$
. $k \in \mathbb{Z}_-$ عدد حقيقي يعني أن: $n = -3k$ حيث		

العلامة	مجموع	جزأة	عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
0.75	0.75		(5) نقطة كافية من المستوى لاحتتها z تختلف عن A و C . (E) هي المستقيم (AC) باستثناء القطعة المستقيمة $[AC]$ أي أن $(E) \neq (AC)$
			التمرين الرابع: (07 نقاط)
02	0.5×2	0.5×2	(1) دراسة اتجاه تغير الدالة g : ليكن $g'(x) = e^x - e$: $x \in \mathbb{R}$ ب) الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى: $g(x) \geq 0$: $x \in \mathbb{R}$ اذن من أجل كل $g(1) = e^1 - e = 0$ لدينا
01	0,50	0,50	(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f : ليكن $f'(x) = e^x - ex = g(x)$: $x \in \mathbb{R}$ لدينا $f'(1) = g(1) = 0$ ومن أجل $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0\}$ أي $g(x) > 0$ إذ $f'(x) > 0$: $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ الدالة f متزايدة تماماً على \mathbb{R} .
0.75	0.25		(3) حساب كلاً من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}ex^2 = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \frac{1}{2}ex^2 = -\infty$
	0.25		$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{1}{2}ex^2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2}e \right) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ و
	0.25		جدول التغيرات
0.50	0,50		(4) دراسة الوضعيّة النسبية للمنحنين (\mathcal{C}_g) و (\mathcal{C}_f) . $f(x) - g(x) = ex \left(-\frac{1}{2}x + 1 \right)$: $x \in \mathbb{R}$ ليكن
0.75	0,75		$(\mathcal{C}_g) \subset]-\infty; 0] \cup]2; +\infty[$ $(\mathcal{C}_f) \subset]0; 2[$ $(\mathcal{C}_g) \cap (\mathcal{C}_f) = \{0, 2\}$ متقاطعان
0.50	0.25	0.25	(5) الرسم : (\mathcal{C}_f) (\mathcal{C}_g)

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
	مجموع مجزأة	
0.5	0.25	6) حساب بالسنتيمتر المربع، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (\mathcal{C}_f) و (\mathcal{C}_g) . $A = \int_0^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}ex^2 + ex \right) dx = \left[-\frac{1}{6}ex^3 + \frac{1}{2}ex^2 \right]_0^2$ $A = -\frac{8e}{6} + \frac{4e}{2} = -\frac{4e}{3} + 2e = \frac{2e}{3} \text{ ua}$
	0.25	$A = \frac{8e}{3} \text{ cm}^2$
01	0.25 7) a) دالة زوجية.....
	0.25 b) حساب $h(x) + f(x)$
	0.25 استنتاج كيفية رسم (Γ) انطلاقا من (\mathcal{C}_f)
	0.25 الرسم.....