الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

المستوى: 2 رياضي **السنة الدراسية: 2025-2026**

الفرض التجريبي الأول للفصل الأول في مادة الرياضيات

التمـرين الأول: (8 نقاط)

نعتبر $P(x)$ كثير الحدود للمتغير الحقيقي x و λ عدد حقيقي حيث: $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + \lambda$.

I)- عين قيمة العدد الحقيقي λ حتى يكون -2 جذراً لِ $P(x)$.

II)- فيما يلي نضع $\lambda = -6$.

1) عين كثير الحدود $Q(x)$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x: $P(x) = (x+2)Q(x)$.

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $P(x) = 0$.

3) أدرس إشارة $P(x)$ حسب قيم x.

4) استنتج في $\mathbb{R}$ حل المتراجحة: $2(x^3 - 3) \geq -5x^2 + x$.

III)- لتكن المعادلة من الدرجة الثانية التالية: $3x^2 - 2x - 5 = 0 \ldots (E)$

1) برر أن المعادلة (E) تقبل حلين x_1 و x_2 مختلفين في الإشارة لا يطلب تعيينهما.

2) بدون حساب قيمة x_1 و x_2 أحسب: ${x_1}^2 + {x_2}^2$.

التمـرين الثاني: (12 نقطة)

لتكن f الدالة المعرفة على $D =]-\infty;-3] \cup [-1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{x^2+4x+3}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D: $f(x) = \sqrt{(x+2)^2 - 1}$.

2) بين أن المنحنى (C_f) يقبل محور تناظر معادلته: $x + 2 = 0$.

3) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty;-3] \cup [-1;+\infty[$ بـ: $g(x) = (x+2)^2 - 1$.

أ- فكك الدالة g إلى مركب دالتين بسيطتين يطلب تعيينهما.

ب- أدرس إتجاه تغير الدالة g على كل من المجالين $]-\infty;-3]$ و $[-1;+\infty[$.

ج- استنتج إتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty;-3]$ و $[-1;+\infty[$.

4) إليك في الوثيقة المرفقة جزء من (C_f)، أكمل رسم المنحنى (C_f) على D (الرسم يكون على الوثيقة المرفقة).

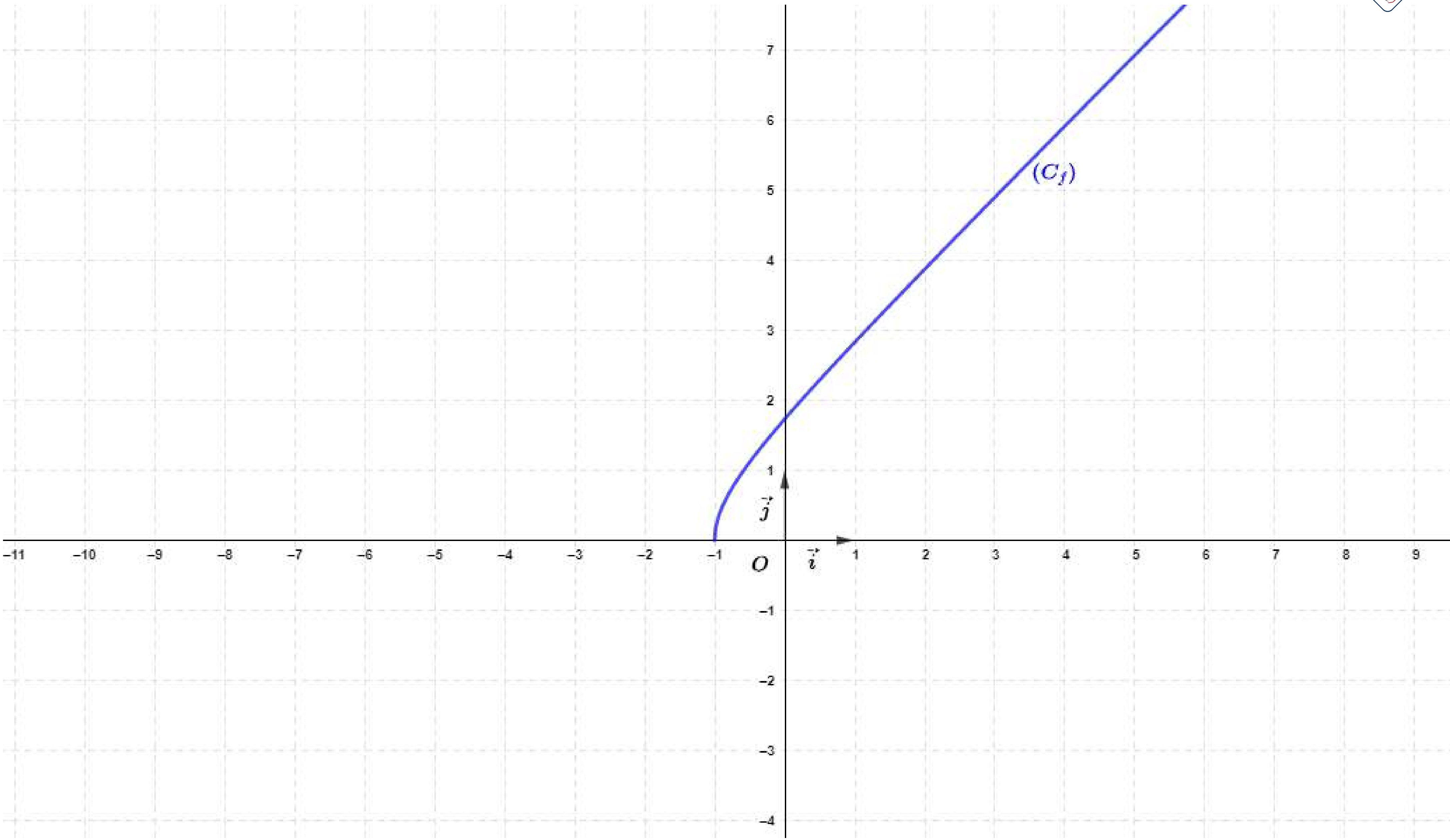
5) لتكن h الدالة المعرفة بـ: $h(x) = f(|x|-2)+1$. وليكن (C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ- تأكد أن: $D_h =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$

ب- بين أن h دالة زوجية.

ج- اشرح طريقة رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f)، ثم ارسمه في نفس المعلم السابق (الرسم يكون على الوثيقة المرفقة).

اللقب: .... الاسم: .... القسم: ....



الوثيقة المرفقة تسلم مع ورقة الإجابة (لاتنسى كتابة الاسم واللقب).

التنقيط

التمرين الأول : (08 نقاط)

نعتبر $P(x)$ كثير الحدود للمتغير الحقيقي x و λ عدد حقيقي

حيث: $P(x)=2x^3+5x^2-x+\lambda$.

I- تعين قيمة العدد الحقيقي λ حتى يكون -2 جذراً لِـ $P(x)$:

-2 جذرا لِـ $P(x)$ معناه: $P(-2)=0$

أي: $2(-2)^3+5(-2)^2-(-2)+\lambda=0$

ومنه: $-16+22+\lambda=0$

إذن: $\boxed{\lambda=-6}$

II- فيما يلي نضع $\lambda=-6$ يصبح لدينا: $P(x)=2x^3+5x^2-x-6$.

1) تعين كثير الحدود $Q(x)$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x: $P(x)=(x+2)Q(x)$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+5x^2\ -x-6 & x+2 \\ \cline{2-2} -2x^3-4x^2\qquad\quad & 2x^2+x-3 \\ \cline{1-1} x^2\ -x\quad & \\ -x^2-2x\quad & \\ \cline{1-1} -3x-6 & \\ 3x+6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

ومنه: $\boxed{P(x)=(x+2)(2x^2+x-3)}$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $P(x)=0$:

لدينا: $P(x)=0$ معناه: $(x+2)(2x^2+x-3)=0$

أي: $\begin{cases} x+2=0 \\ \text{أو} \\ 2x^2+x-3=0 \end{cases}$

لدينا: $x+2=0$ أي: $x=-2$ ومنه: $\boxed{S_1=\{-2\}}$

ولدينا: $2x^2+x-3=0$

و $\Delta=b^2-4ac=25$

بما أن $\Delta>0$ فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين

هما: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-\dfrac{3}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=1 \end{cases}$

ومنه: $\boxed{S_2=\left\{-\dfrac{3}{2};1\right\}}$

إذن حلول المعادلة $P(x)=0$ في $\mathbb{R}$ هي:

$$\boxed{S=S_1\cup S_2=\left\{-2;-\frac{3}{2};1\right\}}$$

3) دراسة إشارة $P(x)$ حسب قيم x:

x	$-\infty$		-2		$\frac{-3}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2+x-3$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

4) استنتج في $\mathbb{R}$ حل المتراجحة: $2(x^3-3)\geq -5x^2+x$

لدينا: $2(x^3-3)\geq -5x^2+x$

يكافئ: $2(x^3-3)+5x^2-x\geq 0$

يكافئ: $2x^3+5x^2-x-6\geq 0$

يكافئ: $P(x)\geq 0$

ومنه: $\boxed{S=\left[-2;-\dfrac{3}{2}\right]\cup[1;+\infty[}$

III- لتكن المعادلة من الدرجة الثانية التالية: $3x^2-2x-5=0\ ...\ (E)$

1) تبرر أن المعادلة (E) تقبل حلين x_1 و x_2 مختلفين في الإشارة لا يطلب تعيينهما:

لدينا: $\dfrac{c}{a}=\dfrac{-5}{3}$ بما أن $\dfrac{c}{a}<0$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين x_1 و x_2 مختلفين في الإشارة.

2) بدون حساب قيمة x_1 و x_2 نحسب ${x_1}^2+{x_2}^2$:

نعلم أن: $(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2$

ومنه: $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

ومن جهة أخرى نعلم أن: $S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{2}{3}$

و $P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{-5}{3}$

إذن: $x_1^2+x_2^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-2\left(\dfrac{-5}{3}\right)$

وعليه: $\boxed{x_1^2+x_2^2=\dfrac{34}{9}}$

التمرين الثاني : (12 نقطة)

لتكن f الدالة المعرفة على $D=]-\infty;-3]\cup[-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2+4x+3}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D:

$f(x)=\sqrt{(x+2)^2-1}$.

من أجل كل عدد حقيقي x من D لدينا:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+2)^2-1} &= \sqrt{x^2+4+4x-1} \\ &= \sqrt{x^2+4x+3} \\ &= \boxed{f(x)}\end{aligned}$$

2) تبين أن المنحنى (C_f) يقبل محور تناظر معادلته: $x+2=0$.

لدينا $x \in D$ معناه: $\begin{cases} x \in]-\infty;-3] \\ \text{أو} \\ x \in [-1;+\infty[\end{cases}$

معناه: $\begin{cases} x \leq -3 \\ \text{أو} \\ x \geq -1 \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} -x \geq 3 \\ \text{أو} \\ -x \leq 1 \end{cases}$

معناه: $\begin{cases} -4-x \geq -1 \\ \text{أو} \\ -4-x \leq -3 \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} -4-x \in [-1;+\infty[\\ \text{أو} \\ -4-x \in]-\infty;-3] \end{cases}$

معناه: $-4-x \in D$

وعليه من أجل $x \in D$ و $-4-x \in D$ لدينا:

$$\begin{aligned} f(-4-x) &= \sqrt{(-4-x+2)^2-1} \\ &= \sqrt{(-x-2)^2-1} \\ &= \sqrt{(x+2)^2-1} \\ &= \boxed{f(x)} \end{aligned}$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل محور تناظر معادلته: $x=-2$.

3) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty;-3] \cup [-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=(x+2)^2-1$.

أ- تفكيك الدالة g إلى مركب دالتين بسيطتين يطلب تعيينهما:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "g = v\circ u"'] & x+2 \arrow[r, "v"] & (x+2)^2-1 \end{tikzcd}$$

حيث:

$$\begin{aligned} u(x) &= x+2 \\ v(x) &= x^2-1 \end{aligned}$$

ب- أدرس إتجاه تغير الدالة g على كل من المجالين $]-\infty;-3]$ و $[-1;+\infty[$:

◄ على المجال $]-\infty;-3]$:

- الدالة u متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-3]$ (لأن $a=1$).
- تعيين $u(]-\infty;-3])$:
$u(]-\infty;-3]) =]-\infty;-1]$
- الدالة v متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$
- ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-3]$.

◄ على المجال $[-1;+\infty[$:

- الدالة u متزايدة تماما على المجال $[-1;+\infty[$ (لأن $a=1$).
- تعيين $u([-1;+\infty[)$:
$u([-1;+\infty[) = [1;+\infty[$
- الدالة v متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$
- ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[-1;+\infty[$.

ج- استنتج إتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty;-3]$ و $[-1;+\infty[$:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f = v\circ g"'] & g(x) \arrow[r, "v"] & \sqrt{g(x)} \end{tikzcd}$$

◄ على المجال $[-1;+\infty[$:

- الدالة g متزايدة تماما على المجال $[-1;+\infty[$.
- تعيين $g([-1;+\infty[)$:
$g([-1;+\infty[) = [0;+\infty[$
- الدالة v متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$
- ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-1;+\infty[$.

◄ على المجال $]-\infty;-3]$:

بما أن (C_f) يقبل محور تناظر معادلته $x=-2$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-3]$.

4) إكمال رسم المنحنى (C_f) على D (الرسم على الوثيقة المرفقة).

5) لتكن h الدالة المعرفة بـ: $h(x)=f(|x|-2)+1$. وليكن (C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ- التأكد أن: $D_h =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$:

لدينا:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "h_1"] \arrow[rr, bend right, "h = h_2\circ h_1"'] & {|x|-2} \arrow[r, "h_2"] & f(|x|-2)+1 \end{tikzcd}$$

حيث:

$$\begin{aligned} h_1(x) &= |x|-2 \quad ; D_{h_1} = \mathbb{R} \\ h_2(x) &= f(x)+1 \quad ; D_{h_2} = D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_h &= \{x \in \mathbb{R} / x \in D_{h_1} \,;\, h-1(x) \in D_{h_2}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \,;\, |x|-2 \in D\} \end{aligned}$$

لدينا $|x|-2 \in D$ معناه: $\begin{cases} |x|-2 \in]-\infty;-3] \\ \text{أو} \\ |x|-2 \in [-1;+\infty[\end{cases}$

معناه: $\begin{cases} |x|-2 \leq -3 \\ \text{أو} \\ |x|-2 \geq -1 \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} |x| \leq -1 \ \text{تناقض} \\ \text{أو} \\ |x| \geq 1 \end{cases}$

ومنه: $|x| \geq 1$ معناه $\begin{cases} x \geq 1 \\ \text{أو} \\ x \leq -1 \end{cases}$

معناه: $\begin{cases} x \in [1;+\infty[\\ \text{أو} \\ x \in]-\infty;-1] \end{cases}$ معناه: $x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$

$$\begin{aligned} D_h &= \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \,;\, |x|-2 \in D\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \,;\, x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\} \\ &= \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \cap (]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[) \\ &= \boxed{(]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[)} \end{aligned}$$

ب- تبيين أن h دالة زوجية:

- لدينا D_h متناظرة بالنسبة إلى الصفر.
- من أجل كل $x \in D_h$ و $-x \in D_h$ لدينا:

$$h(-x) = f(|-x|-2)+1 = f(|x|-2)+1 = \boxed{h(x)}$$

ومنه الدالة h زوجية.

ج- شرح طريقة رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f):

لدينا: $h(x) = \begin{cases} f(x-2)+1 \,; x \geq 0 \\ f(-x-2)+1 \,; x \leq 0 \end{cases}$

لما $x \geq 0$ يكون (C_h) صورة (C_f) بإنسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

لما $x \leq 0$ يكون (C_h) متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأنها دالة زوجية.

رسم (C_h) في نفس المعلم السابق (الرسم على الوثيقة المرفقة).