الفرض المحروس للثُّلاثي الأوَّل في مـــــادَّة الرِّياضيّـــات.

المُدَّة الزَّمنيَّة : ساعة

نص التَّمرين (1)

بَسِّط الأعداد الآتيَّة (دون اِستعمال الآلة الحاسبة)، ثُمَّ أُذكر أصغر مجموعة ينتمي إليها كل عدد :

$$A = \frac{\sqrt{27} + \sqrt{12} - \sqrt{75}}{2\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{50}} \; ; \; B = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \; ; \; C = \frac{4 \times 75 \times 13}{26 \times 2^5 \times 5^3} \; ; \; D = \left(\frac{4^{n+1} + 4^n}{2^{2n+1} - 2^{2n}}\right)^2$$

نص التَّمرين (2)

I) A ; B وَ C أعداد حقيقيَّة، حَيْثُ : $A = 2024$; $B = 1446$ وَ $C = 241$.

1. أَثْبت أَنَّ C عددٌ أَوليٌّ.
2. حَلِّل كلاًّ من A وَ B إلى جداء عوامل أَوَّليّة.
3. أُحسب باستعمال التّحليل كلاًّ من : $PGCD\,(A;B)$ وَ $PPCM\,(A;B)$.

II) نعتبر العدد الحقيقي D المعرّف كما يلي : $D = 125,\underline{457}457\cdots$.

1. أُكْتب العدد D على شكل كسر.
2. أكمل الجدول التَّالي :

العدد	المدوّر إلى 10^{-4}	المدوّر إلى 10^{-2}	الكتابة العلميّة	رتبة المقدار
$0,005736$				

نص التَّمرين (3)

n عددٌ طبيعيٌّ غير معدوم.

1. أثبت صحة المساواة : $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$.
2. بَسِّط الجداء التَّالي :

$$T\,(n) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

3. أثبت أَنَّ $T\,(100)$ عددٌ عشريٌّ.

وفّقكم الله جميعًا

حل التّمرين 01

تَبْسِيط العبارة A : لدينا :

$$\begin{aligned}A &= \frac{\sqrt{27}+\sqrt{12}-\sqrt{75}}{2\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{50}}\\ &= \frac{\sqrt{9\times 3}+\sqrt{4\times 3}-\sqrt{25\times 3}}{2\sqrt{4\times 2}+\sqrt{9\times 2}-\sqrt{25\times 2}}\\ &= \frac{\sqrt{9}\times\sqrt{3}+\sqrt{4}\times\sqrt{3}-\sqrt{25}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{4}\times\sqrt{2}+\sqrt{9}\times\sqrt{2}-\sqrt{25}\times\sqrt{2}}\\ &= \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{3}-5\sqrt{3}}{4\sqrt{2}+3\sqrt{2}-5\sqrt{2}}\\ &= \frac{(3+2-5)\sqrt{3}}{(4+3-5)\sqrt{2}}\\ &= \frac{0\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\ &= 0\end{aligned}$$

بما أنَّ : $0 \in \mathbb{N}$، فإنَّ : $A \in \mathbb{N}$.

تَبْسِيط العبارة B : لدينا :

$$\begin{aligned}B &= \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}\\ &= \frac{\frac{1\times 3-2\times 1}{2\times 3}}{1-\frac{(1)^2}{(4)^2}} = \frac{\frac{3-2}{6}}{1-\frac{1}{16}}\\ &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1\times 16-1\times 1}{1\times 16}}\\ &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{15}{16}} = \frac{1}{6}\times\frac{16}{15} = \frac{8}{45}\end{aligned}$$

بما أنَّ : $\frac{8}{45} \in \mathbb{Q}$، فإنَّ : $B \in \mathbb{Q}$.

تَبْسِيط العبارة C : لدينا :

$$\begin{aligned}C &= \frac{4\times 75\times 13}{26\times 2^5\times 5^3}\\ &= \frac{2^2\times 3\times 5^2\times 13}{2\times 13\times 2^5\times 5^3}\\ &= \frac{2^2\times 3\times 5^2\times 13}{2^6\times 5^3\times 13}\\ &= 2^{2-6}\times 3\times 5^{2-3}\times 13^{1-1}\\ &= 2^{-4}\times 3\times 5^{-1}\\ &= \frac{3}{2^4\times 5}\end{aligned}$$

بما أنَّ : $\frac{3}{2^4\times 5} \in \mathbb{D}$، فإنَّ : $C \in \mathbb{D}$.

تَبْسِيط العبارة D : لدينا :

$$\begin{aligned}D &= \left(\frac{4^{n+1}+4^n}{2^{2n+1}-2^{2n}}\right)^2\\ &= \left(\frac{(2^2)^{n+1}+(2^2)^n}{2^{2n+1}-2^{2n}}\right)^2\\ &= \left(\frac{2^{2n+2}+2^{2n}}{2^{2n+1}-2^{2n}}\right)^2\\ &= \left(\frac{2^{2n}\times 2^2+2^{2n}\times 1}{2^{2n}\times 2-2^{2n}\times 1}\right)^2\\ &= \left(\frac{2^{2n}(2^2+1)}{2^{2n}(2-1)}\right)^2\\ &= \left(\frac{5}{1}\right)^2\\ &= 25\end{aligned}$$

بما أنَّ : $25 \in \mathbb{N}$، فإنَّ : $D \in \mathbb{N}$.

حل التّمرين 02

1 إثْبات أنَّ : 241 عددٌ طبيعيٌّ : بما أنَّ : $\sqrt{241} \approx 15,5241747$. الآن، نختبر إن كان العدد 241 يقبل القسمة على الأعداد الأوّليّة حسب ترتيبها في قائمة الأعداد الأوّليّة الأولى :

هل العدد 142 يقبل القسمة	2	3	5	7	11	13
	لا	لا	لا	لا	لا	لا

بهذا نكون قد أثْبتنا أنَّ العدد 241 عددٌ أوليٌّ.

❷ تحليل كلاً من العددين A وَ B :

⊕ تحليل العدد A :

2	2024
2	1012
2	506
11	253
23	23
	1

$A = 2^3 \times 11 \times 23$.

⊕ تحليل العدد A :

2	1446
3	723
241	241
	1

$B = 2 \times 3 \times 241$.

❸ حساب $PGCD\,(A;B)$ وَ $PPCM\,(A;B)$:

⊕ حساب $PGCD\,(A;B)$:

$$\begin{aligned} PGCD\,(A;B) &= PGCD\,(2024;1446) \\ &= 2 \end{aligned}$$

إذن، ينتج لنا : $PGCD\,(A;B) = 2$.

⊕ حساب $PPCM\,(A;B)$:

$$\begin{aligned} PPCM\,(A;B) &= PPCM\,(2024;1446) \\ &= 2^3 \times 3 \times 11 \times 23 \times 241 \\ &= 1463352 \end{aligned}$$

إذن، ينتج لنا : $PPCM\,(A;B) = 1463352$.

❶ كتابة العدد D على شكل كسر :

لدينا :

$$\begin{aligned} D &= 125,\underline{457}457\cdots \\ &= 125 + 0,\underline{457}457\cdots \\ &= 125 + x \end{aligned}$$

حَيْثُ : $x = 0,\underline{457}457\cdots$.

لدينا :

$$\begin{aligned} 1000x &= 457,\underline{457}457\cdots \\ &= 457 + 0,\underline{457}457\cdots \\ &= 457 + x \end{aligned}$$

وعليه :

$$\begin{aligned} 1000x - x &= 457 \\ 999x &= 457 \\ x &= \frac{457}{999} \end{aligned}$$

وبالتَّالي :

$$\begin{aligned} D &= 125 + x \\ &= 125 + \frac{457}{999} \\ &= \frac{125 \times 999 + 457}{999} \\ &= \frac{125332}{999} \end{aligned}$$

إذن : $D = \frac{125332}{999}$.

❷ إكْمال الجدول :

العدد	$0,005736$
المدوّر إلى 10^{-4}	$0,0057$
المدوّر إلى 10^{-2}	$0,01$
الكتابة العلميّة	$5,736 \times 10^{-3}$
رتبة المقدار	6×10^{-3}

حل التَّمرين 03

❶ إثبات صحة المساواة $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$:

⊕ طريقة أولى :

◄ من أجل كل عددٌ طبيعيٌّ غير معدوم n، لدينا :

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{1 \times n - 1 \times 1}{1 \times n} = \frac{n-1}{n}$$

إذن :

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

www.dzexams.com